RAPPORT

2015/61

Økonomiske parametere og forventete verdier av petroleumsressurser og reserver

Steinar Strøm, Michael Hoel og Pernille Parmer

VISTA ANALYSE AS

Oljedirektoratet

Dokumentdetaljer

Vista Analyse AS	Rapport nummer 2015/61
Rapporttittel	Økonomiske parametere og forventete verdier av petroleumsressurser og reserver
ISBN	978-82-8126-257-7
Forfatter	Steinar Strøm, Michael Hoel og Pernille Parmer
Dato for ferdigstilling	29.09.2015
Prosjektleder	Steinar Strøm
Kvalitetssikrer	Michael Hoel
Oppdragsgiver	Oljedirektoratet
Tilgjengelighet	Offentlig
Publisert	www.vista-analyse.no

Forord

Denne rapporten er basert på et oppdrag fra Oljedirektoratet. Den viser hvordan en kan lage anslag på forventet verdi av økonomisk utnyttbare olje-og gassreserver. Anslaget er betinget av at reservene er økonomisk utnyttbare. Den betingete forventningen av økonomisk utnyttbare reserver avhenger av olje- og gasspriser, utvinningskostnader og geologiske parametre.

Prosjektleder

Steinar Strøm

Vista Analyse AS

Innhold

1. Innledning

I en kalkyle av samfunnsøkonomisk utnytting av naturressurser må en ta stilling til hvordan en skal håndtere usikkerhet. Vi skiller mellom systematisk og usystematisk risiko. Det er anbefalt av Finansdepartementet å representere alle usikre størrelser med *forventete verdier* i samfunnsøkonomiske analyser. For den systematiske risikoen er det vanlig å ta hensyn til denne risikoen gjennom størrelsen på renten brukt til ned-diskontering av fremtidige verdier i prosjektet.

Usikkerheten kan være knyttet til flere forhold som:

- De initiale olje- og gassressursene i et felt
- Usikkerhet knyttet til de utvinnbare ressursene størrelse etterhvert som en utvinner ressursen; gode og dårlige nyheter etterhvert som ressursene utvinnes
- Fremtidige olje- og gasspriser
- Kostnadene ved å utvinne reservene. Reservene er de initiale ressursene fratrukket det som blir igjen av ressursene etter at produksjonen er avsluttet

I det følgende skal vi kun se på usikkerhet knyttet til oljeressurser og utvinnbare reserver. Vi viser hva den forventede verdien av initiale ressurser er og deretter hva den forventede verdien er, gitt en optimal utvinningsplan. Vi viser også hva den betingete og ubetingete forventingen er av de utvinnbare reservene.

2. Oljeressurser og utvinnbare oljereserver

I fortsettelsen vil vi anta at det er kun tale om oljeressurser. Opplegget vårt kan lett utvides til å omfatte både olje- og gassressurser. Oljeressurser er de ressursene som finnes i et felt. Disse ressursene kan i prinsippet utvinnes, men det normale er at etter utvinningen er fullført vil det være gjenværende ressurser i feltet. Hvor mye som vil være igjen, vil avhenge av geologiske forhold, kostnadene ved å utvinne ressursene og oljeprisene.

De utvinnbare oljereservene er de oljeressurser som det kan lønne seg å utvinne, gitt forventede kostnader og priser.

3. Forventet verdi av initiale oljeressurser

Anta at de initiale oljeressursene ikke er helt eksakt kjent. En kjenner bare til sannsynlighetsfordelingen for de initiale ressursene. Denne fordelingen vil normalt være skjev til høyre slik at det er en positiv sannsynlighet, om enn liten, for store ressurser.

La de initiale oljeressursene, *R_0*, være uttrykt i en volumstørrelse. Et eksempel på en høyreskjev fordeling er en log-normal fordeling, det vil si:

$$(1)\left|\begin{array}{l} \log R_0 = \mu_0 + \varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 \sim N(0,\sigma_0) \\ R_0 = e^{\mu_0+\varepsilon_0} = e^{\mu_0+\sigma_0\eta} \\ \eta \sim N(0,1) \end{array}\right.$$

Her er μ_0 forventningen til *$\log R_0$* og σ_0^2 er variansen til *$\log R_0$*. Begge parameterne er bestemt av geologiske forhold.

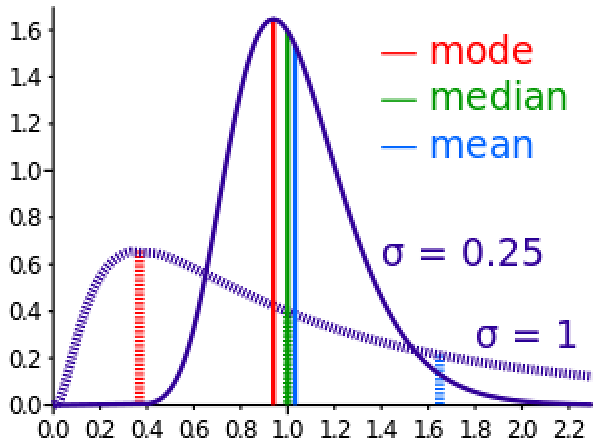
Forventningen og variansen[1] til ressursene da gitt ved

$$(2) \quad E\left[R_0\right] = e^{u_0+\frac{\sigma_0^2}{2}}, var\left[R_0\right] = (e^{\sigma_0^2}-1)E\left[R_0\right]^2 \ .$$

Vi merker oss at skjevheten i fordelingen uttrykt ved σ_0^2 påvirker den forventete verdien av de initiale ressursene. Jo større skjevheten er, desto høyere er den forventete verdien av ressursene. Videre ser vi at variansen er høyere, desto høyere forventningen er.

Figuren nedenfor viser to eksempler på en log-normalt fordelt variabel. Vi ser at jo høyere σ_0^2 er, desto høyere er den forventete verdien både i forhold til median og mode. Som nevnt ovenfor vil det være riktig å benytte forventete verdier av de stokastiske størrelser i samfunnsøkonomiske analyser av olje- og gassprosjekter.

[1] Se Vedlegg 1



Et hovedpoeng i det følgende er å vise at den forventete verdien av de initiale ressursene, gitt en økonomisk optimal utnyttingsplan, er større enn den ubetingete forventete av de initiale oljeressursene. Vi skal senere også vise hva den forventete verdien av reservene er, gitt en optimal økonomisk utnyttingsplan.

4. Optimal økonomisk utnytting av petroleumsressurser: En beslutning under usikkerhet

Et supplement til at de initiale og samlete ressursene er usikre, er at de fremtidige ressursene er antatt å være stokastiske etterhvert som ressursene utvinnes.

La q_t være produksjonen på tidspunkt *t*. Vi antar at ressursene avtar over tid med produksjonen, men at det i tillegg er et stokastisk ledd. Dette leddet kan skyldes mer informasjon, både gode og dårlige nyheter, en får om de ressursene etterhvert som produksjonen går sin gang. På et gitt tidspunkt er de fremtidige ressursene sett fra dette tidspunktet usikre. En mulig beskrivelse av denne usikkerheten er den følgende stokastiske prosessen:

$$(3) \quad dR_t = -q_t dt + dz$$

$$hvor \; dz = \sigma_1 \varepsilon_{1t} \sqrt{dt}$$

Vi antar at ε_{1t} er normal fordelt, ukorrelert over tid, med forventing null og varians lik 1. Forutsetningen om *dz* betyr at den stokastiske prosessen som er med å gi utviklingen i ressursene over tid, er en Wiener prosess.

Vi skal nå se nærmere på hvordan en optimal økonomisk utnytting av ressursene kan beskrives[1].

La p_t være *prisen* på produktet (f.eks. oljepris). For å forenkle fremstillingen antar vi at prisen er konstant over tid og kjent med sikkerhet, dvs at $p_t = p \;\; for\; alle\, t$.

La $C(R_t,q_t)$ være *enhetskostnaden* for produksjon av produktet. Denne kostnaden kan omfatte både investeringskostnader og driftskostnader. Vi antar at denne enhetskostnaden avhenger av ressursene slik at jo lavere ressursmengden er, som den kan bli over tid gjennom utnyttingen av den, desto høyere er kostnaden. For gitt produksjonsrate vil derfor enhetskostnaden stige over tid som følge av ressursuttømmingen. Fra et gitt tidspunkt vil de fremtidige enhetskostnadene være usikre, gitt at usikkerheten er av typen beskrevet i (3).

For å gjøre det enkelt antar vi at enhetskostnadsfunksjonen er lineær:

$$(4) \quad C(R_t, q_t) = a_o - a_1 R_t + a_2 q_t ; (a_0, a_1) > 0; a_2 \geq 0$$

Denne forenklingen gjør analysen nedenfor enklere, uten at prinsipielle poenger blir svekket.

Det at a_1 er positiv gjør at enhetskostnaden øker, desto mindre det er igjen av ressursen.

Vi skal først se på tilfellet med $a_2 > 0$, og deretter spesialtilfellet $a_2 = 0$. I dette siste spesialtilfellet er altså enhetskostnaden uavhengig av produksjonsmengden.

[1] For en tidlig analyse av utvinning av ikke-fornybare ressurser under usikkerhet se R.S. Pindyck (1980): Uncertainty and Exhaustible Resource Markets, *Journal of Political Economy*, Vol 88, No 6, 1203-1225.

La r være renten (etter skatt) som brukes ved ned-diskontering av fremtidige verdier. Denne renten er det avkastningskrav eieren av ressursen har. Initialt er produsentens problem å finne et produksjonsnivå q_t i tiden fremover som er slik at forventet neddiskontert profitt maksimeres.

Vi kan nå mer formelt beskrive produsentens optimeringsproblem:

$$(5) \quad max_q \; E_o \int_0^T \left[p - C(R_t, q_t) \right] q_t e^{-rt} dt$$

$$gitt$$

$$(3) \quad dR_t = -qdt + dz$$

$$hvor \; dz = \sigma_1 \varepsilon_{1t} \sqrt{dt}$$

$$(6) \quad C(R_t, q_t) = a_o - a_1 R_t + a_2 q_t ; (a_0, a_1) > 0; a_2 \geq 0, R_t \geq 0, R_0 \; er \; gitt \; og \; kjent$$

$$(7) \quad 0 \leq q_t \leq \bar{q}$$

$$(8) \quad p - C(R_T, 0) = p - a_o + a_1 R_T = 0$$

Optimeringsproblemet er den plan som produsenten legger ved produksjonsstart, men i denne planen tar han hensyn til at det på fremtidige tidspunkt kan komme overraskelser som beskrevet ved den stokastiske komponenten i (3).

I utregningen av optimumsbetingelsen har vi antatt at R_0 er gitt og kjent. Senere skal vi ta hensyn til at den er usikker og med forventning gitt i (1) ovenfor.

I ulikheten (7) er $\bar{q}$ maksimal produksjon bestemt av kapasitetsforhold. Hvis denne er tilstrekkelig stor og $a_2 > 0$, vil denne kapasitetsskranken aldri være bindende.

Optimeringsproblemet er et stokastisk- dynamisk optimeringsproblem. Stokastikken kommer fra betingelsen (3) og er som nevnt av den typen at det det oppstår gode og dårlige ressursnyheter etterhvert som produksjonen pågår. Etterhvert som produksjonen foregår blir denne usikkerheten kjent, men den fremtidige usikkerheten vil være der. Modellen kan utvides til å inkludere investeringer over tid i feltet som gjør at denne fremtidige usikkerheten blir mindre.

Dynamikken kommer fra bibetingelsen (3) som sier at ressursmengden avtar som følge av at olje produseres. Betingelsen (6) innebærer at enhetskostnaden øker etterhvert som produksjonen skrider frem. Merk at på tidspunkt t er ressursene kjente, men fremtidige utvinningskostnader er usikre som følge av (3). Betingelsen (8) sier at produksjonen opphører når marginalkostnaden ved null produksjon $C(R_T, 0)$ er lik prisen p.

T er tidspunktet da utvinningen opphører. På grunn av usikkerheten beskrevet i (3) er dette tidspunktet i prinsippet stokastisk. Tidspunktet T er også endogent i den forstand at det er bestemt av økonomiske mekanismer.

5. Gjenværende oljeressurser etter avsluttet utvinning

Vi ser fra (8) at ressursene som er igjen ved produksjonsslutt, R_T, er

$$(9) \quad R_T = \frac{a_0 - p}{a_1} > 0, hvis\ a_0 > p$$

Hvis $a_0 \leq p$ vil ressursene bli helt tømt. Et slikt utfall virker usannsynlig, og i fortsettelsen antar vi at (9) er oppfylt. Det betyr at det vil være gjenværende ressurser ved produksjonsslutt.

6. Minste økonomisk mengde

Ressursmengden i (9) kan også tolkes som *m*inste *ø*konomisk *m*engde av ressursen, $R_{MØM}$, dvs

$$(10) \quad R_{MØM} = \frac{a_0 - p}{a_1} > 0$$

Fordi vi utelukker at $a_0 \leq p$, vil $R_{MØM}$ alltid være positiv.

Vi ser at den minste økonomiske mengden av ressursen, $R_{MØM}$, er lavere

- Jo høyere prisen *p* er
- Jo mer enhetskostnaden stiger når ressursen tømmes, dvs jo høyere a_1 er

$R_{MØM}$ er den ressursmengden som gjør at enhetskostnaden er akkurat lik prisen. Blir prisen høyere, må denne ressursmengden minke, slik at kostnaden går opp.

7. Optimumsbetingelsen for optimal utnytting

Førsteordensbetingelsen til optimeringsproblemet (5) – (8) er en stokastisk versjon av den såkalte Euler-likningen. Dette viser vi nedenfor.

La

$$(11) \quad V(R_0) = max_q \; E_0 \int_0^T \left[p - C(R_t, q_t) \right] q_t e^{-rt} dt$$

$$(12) \quad \pi(R_t, q_t) = \left[p - C(R_t, q_t) \right] q_t e^{-rt}$$

$V(R_0)$ er den neddiskonterte profitten i (5) sett fra produksjonsstart, dvs *t=0*, mens $\pi(R_t, q_t)$ er profitten på tidspunkt *t* sett fra tidspunkt *t=0*.

Dersom q_t kan velges fritt, er optimumsløsningen for produksjonsplanen q_t den verdien som maksimerer[1]

$$(13) \quad Max_q \left(\pi(R_t, q_t) - q_t \frac{\partial V(R_t)}{\partial R_t} \right)$$

Vi får da

$$(14) \quad \frac{\partial \pi(R_t, q_t)}{\partial q_t} \geq E_t \int_t^T \frac{\partial \pi(R_t, q_t) e^{-r\tau}}{\partial R_\tau} d\tau$$

T *er bestemt ved* $p - C(R_T) = 0.$ *Ulikhetstegnet vil bare gjelde hvis* $q_t = \overline{q}$

Likning, eventuelt ulikheten, (14) er den omtalte Euler- likningen.

Venstresiden i (14) er den marginale verdien av løpende profitt på tidspunkt *t*. På *t* er ressursene inntil dette tidspunktet kjent, de fremtidige verdiene er usikre. Høyresiden gir den forventete neddiskonterte verdien av å holde en enhet tilbake i reservoarene og dermed redusere fremtidige forventete produksjonskostnader.

Likning (14) sier da at den optimale produksjonsplanen for q_t er kjennetegnet ved at på hvert fremtidig tidspunkt er den marginale profitten (økningen i profitt ved å øke produksjonen med «en enhet») større eller lik den forventete neddiskonterte verdien av å holde denne marginale enheten i reservoaret (som da vil gi lavere utvinningskostnader i fremtiden).

Høyresiden i (14) er dermed en alternativkostnad. Alternativet til å produsere en ekstra enhet på tidspunkt *t* er å la enheten være igjen i reservoaret og dermed bidra til at fremtidige enhetskostnader blir lavere. Dersom produksjon på hvert tidspunkt kan velges fritt og kapasitetsskranken ikke er bindende, vil (14) gjelde med likhet.

[1] Se P. Berck og K. Sydsæter: Matematisk formelsamling for økonomer, Universitetsforlaget 1995, side 141

Dersom enhetskostnaden er uavhengig av produksjonen, dvs. $a_2 = 0$, er profitten en lineær funksjon av q_t, og hvor variasjonsområdet for produksjonen er gitt i (7). Fra (6), (12) og (14) får vi da:

$$(15) \quad Hvis\left[p - C(R_t)\right]e^{-rt} > E_t\int_t^T \frac{\partial\pi(R_t, q_t)e^{-r\tau}}{\partial R_\tau}d\tau, er\ q_t = \bar{q}, ellers\ lik = 0$$

Forenklingen i (5) med $a_2 = 0$, gjør at forventingsuttrykket til høyre i (15) kan skrives

$$(16) \quad E_t\int_t^T \frac{\partial\pi(R_t, q_t)e^{-r\tau}}{\partial R_\tau}d\tau = E_t\int_t^T \frac{\partial\left[p - C(R_\tau)\right]qe^{-r\tau}}{\partial R_\tau}d\tau = a_1 q E_t\int_t^T e^{-r\tau}d\tau = \frac{a_1 q}{r}(e^{-rt} - e^{-rT}) > 0,\ for\ t > T$$

$$og\ hvor\ T\ er\ bestemt\ ved\ p - C(R_T) = p - a_0 + a_1 R_T = p - a_0 + a_1 R_{MØM} = 0$$

På grunn av forutsetningen om at enhetskostnaden er lineær i, R_t, inngår ikke R_t i integranden i (16). Dermed reduseres problemet til et deterministisk problem. Dersom enhetskostnaden ikke hadde vært lineær i R_t, ville dette ikke vært tilfelle.

Optimumsbetingelsen kan derfor i vår noe forenklede modell skrives:

$$(17) \quad Hvis\left[p - a_0 + a_1 R_t\right] > \frac{a_1\bar{q}}{r}(1 - e^{-r(T-t)}) > 0, er\ q = \bar{q}, ellers\ lik = 0$$

$$og\ hvor\ T\ er\ bestemt\ ved\ p - C(R_T) = p - a_0 + a_1 R_T = p - a_0 + a_1 R_{MØM} = 0.$$

8. Utvunnet mengde av ressursen og produksjonsperiodens lengde

Gitt at (17) er oppfylt, vil den totale produserte mengden over perioden *(0,T)* være gitt ved differansen mellom mengden av de initiale ressursene og de ressurser som er gjenværende ved produksjonsslutt:

$$(18) \quad R_0 - R_T = R_0 - R_{MØM} = \int_0^T \bar{q}dt = \bar{q}T$$

Det betyr at den optimale produksjonsperiodens lengde, *T*, er

$$(19) \quad T = \frac{R_0 - R_{MØM}}{\bar{q}}$$

Den optimale lengden på produksjonsperioden er dermed lengre

- Jo større de initiale ressursene er
- Jo lavere minste økonomisk mengde er (som skyldes høyere produktpris og/eller høyere a_1)
- Jo lavere den maksimale produksjonen er.

Merk at en høyere a_1 øker alternativkostnaden i produksjonen og er forklaringen på at levetiden øker med høyere a_1.

Initialt gir betingelsen (17) at

$$(20) \quad Hvis\left[p - a_0 + a_1 R_0\right] > \frac{a_1\bar{q}}{r}(1 - e^{-rT}) > 0, er\ q = \bar{q}, ellers\ lik = 0$$

Fra (10), (19) og (20) får vi da følgende krav til størrelsen på de initiale og samlete ressursene:

$$(21) \quad R_0 > R_{MØM} + \frac{\bar{q}}{r}(1 - e^{-\frac{R_o - R_{MØM}}{\bar{q}}r})$$

Vi ser fra (19) at $R_0 > R_{MØM}$ følger av at

$$(22) \quad rT > 1 - e^{-rT}$$

Denne ulikheten er oppfylt for *T>0*.

Med de forenklinger vi har foretatt, får vi da:

Hvis de initiale og samlete ressursene R_0 er større enn minste økonomiske mengde $R_{MØM}$, så vil det være samfunnsøkonomisk optimalt med et produksjonsprogram $q_t = \bar{q}$ inntil $t = T$, deretter $q_t = 0$.

9. Forventet verdi av oljeressursene, gitt en optimal utvinningsplan

Den optimale produksjonsplanen beskrevet ovenfor innebærer i følge (21) at de initiale ressursene minst må være større enn minste økonomisk mengde. Vi tar nå hensyn til at de initiale ressursene er usikre og med en ubetinget forventning gitt i (2). Det vi skal utlede nå er den betingete forventingen av de initiale ressursene, betinget av at de initiale ressursene R_0 er større enn minste økonomisk mengde $R_{MØM}$.

Den betingete forventningen er

$$(23)\quad E\left[R_0 \mid R_0 > R_{MØM}\right].$$

Den kan regnes ut ved følgende formel:

$$(24)\quad E\left[R_0 \mid R_0 > R_{MØM}\right]Pr(R_0 > R_{MØM}) = \int_{R_0 > R_{MØM}}^{\infty} R_0 g(R_0)dR_0$$

Venstresiden i (24) er den betingete forventningen vi er ute etter multiplisert med sannsynligheten for betingingen. Høyresiden er den ubetingete forventete verdien i halefordelingen til R_0 som starter i $R_{MØM}$ Funksjonen *g(.)* er tettheten i fordelingen til R_0 .

Utledningene av de forskjellige uttrykkene er gitt i Vedlegg 2. Resultatet er:

$$(25)\quad P(R_0 > R_{MØM}) = 1 - \Phi\left(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0}\right)$$

$$(26)\quad \int_{R > R_{MØM}}^{\infty} R_o g(R_0)dR_0 = E\left[R_0\right]\left[1 - \Phi\left(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0} - \sigma_0\right)\right]$$

Her er Φ den kumulative fordelingsfunksjonen i standard normalfordelingen.

$1 - \Phi(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0} - \sigma_0)$ er halesannsynligheten i denne standard normalfordelingen som starter i $\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0} - \sigma_0$,

mens $1 - \Phi(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0})$ er halesannsynligheten i standard normalfordelingen og som starter lenger ute enn den første halesannsynligheten. Ifølge (2) er $E\left[R_0\right] = e^{u_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}}$.

Fra (24)-(26) får vi da:

$$(27) \quad E\left[R_0 \mid R_0 > R_{MØM}\right] = E\left[R_0\right] \frac{\left[1 - \Phi\left(\frac{\log R_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0} - \sigma_0\right)\right]}{\left[1 - \Phi\left(\frac{\log R_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0}\right)\right]}$$

Brøken til høyre i (27) er større enn 1.

Vi har da at

$$(28) \quad E\left[R_0 \mid R_0 > R_{MØM}\right] > E\left[R_0\right]$$

Den betingete forventningen av de samlete ressursene R_0, betinget på en optimal plan for en økonomisk utnytting av ressursen, er med andre ord større enn den ubetingete betingete forventningen, som vist på figuren nedenfor. Figuren viser den trunkerte fordelingen til R_0, gitt at $R_0 > R_{MØM}$.

Fra (25) ser vi at jo høyere σ_0 er, desto høyere er den betingete forventningen i forhold til den ubetingete. Det betyr at jo mer høyreskjev ressursfordelingen er, desto høyere blir den betingete forventingen av de samlete ressursene, betinget på en optimal økonomisk utvinning av ressursene, i forhold til den ubetingete forventningen.

10. Forventete verdier av de utvinnbare reservene

Reservene som blir utnyttet er de samlete ressursene, R_0, fratrukket $R_{MØM}$. Den betingete forventningen av disse reservene er gitt implisitt ved:

$$(29) \quad E\left[R_0 - R_{MØM} \mid R_0 > R_{MØM}\right] Pr(R_0 > R_{MØM}) = \int_{R_0 > R_{MØM}}^{\infty} (R_0 - R_{MØM}) g(R_0) dR_0$$

Fordi $R_{MØM}$ er antatt å være uavhengig av R_0, ser vi at (29) kan skrives:

$$(30) \quad E\left[R_0 - R_{MØM} \mid R_0 > R_{MØM}\right] Pr(R_0 > R_{MØM}) = \int_{R_0 > R_{MØM}}^{\infty} R_0 g(R_0) dR_0 - R_{MØM} \int_{R_0 > R_{MØM}}^{\infty} g(R_0) dR_0$$

Men $\int_{R_0 > R_{MØM}}^{\infty} g(R_0) dR_0$ er ikke noe annet enn $Pr(R_0 > R_{MØM})$, slik at vi ser at (30) kan skrives

$$(31) \quad E\left[R_0 - R_{MØM} \mid R_0 > R_{MØM}\right] Pr(R_0 > R_{MØM}) = \int_{R_0 > R_{MØM}}^{\infty} R_0 g(R_0) dR_0 - R_{MØM}\, Pr(R_0 > R_{MØM})$$

Setter vi inn fra (25 og (26) får vi at den **ubetingete** forventingen av $R_0 - R_{MØM}$ er lik høyresiden i (32) nedenfor

$$(32) \quad E\left[R_0 - R_{MØM} \mid R_0 > R_{MØM}\right]\left[1 - \Phi(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0}\right]$$

$$= E\left[R_0\right]\left[1 - \Phi(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0} - \sigma_0\right] - \left[1 - \Phi(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0}\right] R_{MØM}$$

Det betyr at den **betingete forventningen** av $R_0 - R_{MØM}$ er

$$(33) \quad E\left[R_0 - R_{MØM} \mid R_0 > R_{MØM}\right] = E\left[R_0\right] \frac{1 - \Phi(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0} - \sigma_0)}{1 - \Phi(\frac{logR_{MØM}}{\sigma_0} - \frac{\mu_0}{\sigma_0})} - R_{MØM}$$

Denne ubetingete forventingen av de utvinnbare reservene er lik den betingete forventningen av $R_0 - R_{MØM}$, betinget av at $R_0 - R_{MØM} > 0$, multiplisert med sannsynligheten for denne betingingen, dvs sannsynligheten for at $R_0 - R_{MØM} > 0$.

Denne ubetingete forventingen (høyresiden i (32)) er:

$$(34) \qquad E\left[R_0\right]\left[1 - \Phi(\frac{logR_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}) - \sigma_0\right] - R_{MØM}\left[1 - \Phi(\frac{logR_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0})\right]$$

Vi ser at den ubetingete forventningen av utvinnbare reserver, $R_0 - R_{MØM}$, er lik den ubetingete forventingen av de samlete ressurser multiplisert med en halesannsynlighet i den standardiserte normalfordelingen fratrukket den minste økonomiske mengden multiplisert med en annen og lavere halesannsynlighet i den standardiserte normalfordelingen.

Vi foreslår at det er denne ubetingete forventningen av reservene i (34) som OD bør rapportere inn til RNB.

Vi ser at den informasjon en trenger for å rapportere denne betingete forventningen er:

- Den standardiserte kumulative fordelingsfordelingsfunksjonen, her antatt å være standard normal
- Geologiske parametere som kan gi anslag på μ_0 og σ_0
- Økonomiske parametere som forventet produktpris ved produksjonsslutt og dermed den forventete levetiden for produksjonen på feltet, samt en parameter som sier hvordan enhetskostnader varierer med ressursmengden.

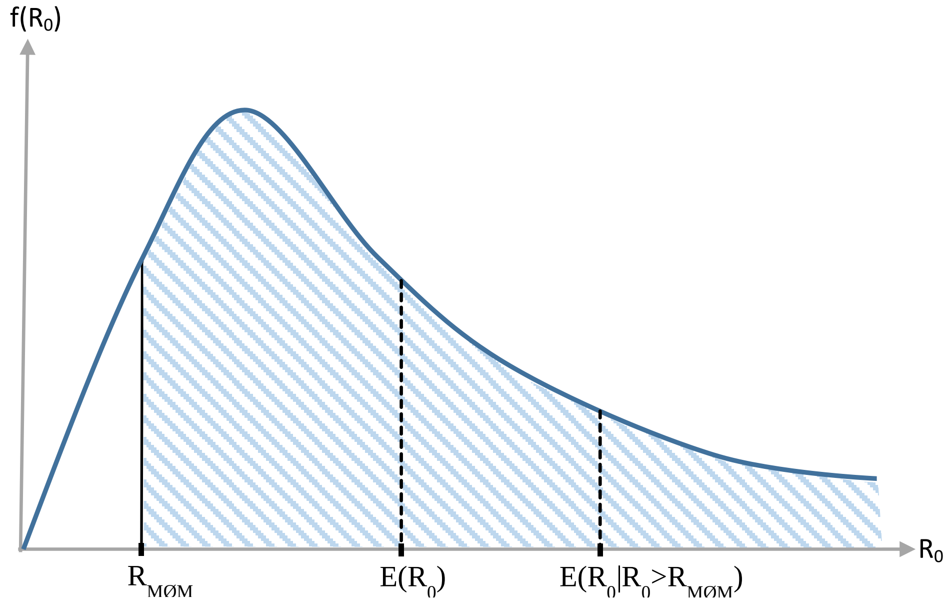
Det nye her i forhold til hva en nå rapporterer, er det tredje strekpunktet. Det nye er altså at en trenger anslag på forventet produktpris og anslag på hvordan enhetskostnaden varierer med ressursmengden. Har en disse opplysningene kan en beregne $R_{MØM}$. Sammen med geologiske parametere kan en da beregne den ubetingete forventingen av reservene som planlegges produsert, R_0-$R_{MØM}$, betinget av at denne størrelsen er positiv.

Multipliserer en den ubetingete forventningen i (34) med prisen *p*, får en et anslag på den forventete verdien av reservene som vil bli produsert, se likning (35).

Dersom produktprisen også er stokastisk, så ser en at en må ta hensyn til at prisen er korrelert med $R_{MØM} = \dfrac{a_0 - p}{a_1}$. For å beregne verdien av reservene som blir produsert må en da ta hensyn til denne korrelasjonen og regne ut forventingen i (36). Dette er ikke rett frem regning. Grunnen er at $R_{MØM}$ inngår i de kumulative sannsynlighetene i (29). Beregningene kan gjøres ved simuleringer.

$$(35) \quad pE\left[R_0 - R_{MØM} \mid R_0 > R_{MØM}\right] Pr(R_0 > R_{MØM})$$

$$(36) \quad E\left\{pE\left[R_0 - R_{MØM} \mid R_0 > R_{MØM}\right] Pr(R_0 > R_{MØM})\right\}$$



f(R0)
R0
RMØM
E(R0)
E(R0|R0>RMØM)

11. Utvidelser av analysen

Mulige utvidelser i forhold til det vi har presentert er:

- Usikre fremtidige og varierende priser, som i modellen her vil gjøre at levetiden av et felt, T, også blir usikker
- Enhetskostnadsfunksjon som ikke er lineær i produksjonen, noe som kan gi indre løsninger og varierende produksjon over tid
- Enhetskostnadsfunksjon som ikke er lineær i ressursmengdene som fører til at usikkerheten ikke forsvinner fra alternativkostnaden i utnyttingen av ressursen
- Leteaktiviteter i produksjonsperioden og som tar sikte på å redusere usikkerheten knyttet til omfanget av ressursene
- Andre fordelinger enn den log-normale fordelingen, som f.eks. Gammafordelinger.

Vedlegg 1. Forventningen og variansen til *R₀*

R_0 er gitt ved

$$(1) \quad \log R_0 = \mu_0 + \varepsilon_0$$

$$hvor\ \eta \sim N(0, \sigma_0)$$

dvs

$$(2) \quad \log R_0 = \mu_0 + \sigma_0 \eta$$

$$hvor\ \eta \sim N(0,1)$$

$$(3) \quad R_0 = e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta}$$

da er

$$(4) \quad E(R_0) = e^{\mu_0} E(e^{\sigma_0 \eta})$$

$$(5) \quad E(e^{\sigma_0 \eta}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma_0 x} f(x) dx$$

hvor $f(x)$ *er standardnormaltettheten, da er*

$$(6) \quad E(e^{\sigma_0 \eta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(\sigma_0 x - \frac{x^2}{2})} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{(x-\sigma_0)^2}{2} + \frac{\sigma_o^2}{2})} dx = e^{\frac{\sigma_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\sigma_0)^2}{2}} dx$$

$$fordi: -\frac{(x-\sigma_0)^2}{2} + \frac{\sigma_o^2}{2} = \sigma_0 x - \frac{x^2}{2}$$

dvs

$$(7) \quad E(e^{\sigma_0 \eta}) = e^{\frac{\sigma_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = e^{\frac{\sigma_0^2}{2}}$$

og da

$$(8) \quad E(R_0) = e^{\mu_0} E(e^{\sigma_0 \eta}) = e^{\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}}$$

Variansen til R_0 er gitt ved

$$(9) \quad V(R_0) = V(e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta}) = E[(e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta})^2] - [E(e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta})]^2$$

$$(10) \quad (e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta})^2 = (e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta})(e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta}) = e^{2\mu_0 + 2\sigma_0 \eta}$$

$$(11) \quad E[(e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta})^2] = e^{2\mu_0} E(e^{2\sigma_0 \eta}) = e^{2\mu_0} e^{4\frac{\sigma_0^2}{2}} = e^{2\mu_0 + 2\sigma_0^2}$$

$$(12) \quad V(R_0) = e^{2\mu_0 + 2\sigma_0^2} - e^{\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}} e^{\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}} = e^{2\mu_0 + 2\sigma_0^2} - e^{2\mu_0 + \sigma_0^2}$$

dvs

$$(13) \quad V(R_0) = e^{2\mu + \sigma_0^2}(e^{\sigma_0^2} - 1) = \left[\mathrm{E}(R_0)\right]^2 (e^{\sigma_0^2} - 1)$$

Vedlegg 2. Den betingete forventingen

Den betingede forventningen: $E\left[R_0 \mid R_0 > R_{MØM}\right]$

$$(14)\, E\left[R_0 \mid R_0 > R_{MØM}\right] Pr(R_0 > R_{MØM}) = \int_{R_0 > R_{MØM}}^{\infty} R_0 g(R_0) dR_0 = \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta} f(\eta) d\eta$$

hvor $f(.)$ *er standard normaltettheten, og vi får da*

$$(15) \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} e^{\mu_0 + \sigma_0 \eta} f(\eta) d\eta = e^{\mu_0} \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} e^{\sigma_0 \eta} f(\eta) d\eta = e^{\mu_0} \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\sigma_0 \eta - \frac{\eta^2}{2}\right) d\eta$$

dvs

$$(16) \quad e^{\mu_0} \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\sigma_0 \eta - \frac{\eta^2}{2}\right) d\eta = e^{\mu_0} \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(\eta - \sigma_0)^2 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right) d\eta$$

eller

$$(17) \quad e^{\mu_0} \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(\eta - \sigma_0)^2 + \frac{\sigma_0^2}{2}\right) d\eta = e^{\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}} \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(\eta - \sigma_0)^2\right) d\eta$$

eller

$$(18) \quad e^{\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}} \int_{\eta > \frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}(\eta - \sigma_0)^2\right) d\eta = E(R_0)\left[1 - \Phi\left(\frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0} - \sigma_0\right)\right]$$

Fordi $(\Phi(.)$ *er sannsynligheten i en standrard normalfordeling)*

$$(19) \quad Pr(R_0 > R_{MØM}) = \left[1 - \Phi\left(\frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}\right)\right]$$

så får vi

$$(20) \quad E\left[R_0 \mid R_0 > R_{MØM}\right] = E(R_0) \frac{\left[1 - \Phi\left(\frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0} - \sigma_0\right)\right]}{\left[1 - \Phi\left(\frac{\log R_{MØM} - \mu_0}{\sigma_0}\right)\right]} > E(R_0)$$

Vista Analyse AS

Vista Analyse AS er et samfunnsfaglig analyseselskap med hovedvekt på økonomisk forskning, utredning, evaluering og rådgivning. Vi utfører oppdrag med høy faglig kvalitet, uavhengighet og integritet. Våre sentrale temaområder omfatter klima, energi, samferdsel, næringsutvikling, byutvikling og velferd.

Våre medarbeidere har meget høy akademisk kompetanse og bred erfaring innennfor konsulentvirksomhet. Ved behov benytter vi et velutviklet nettverk med selskaper og ressurspersoner nasjonalt og internasjonalt. Selskapet er i sin helhet eiet av medarbeiderne.

Vista Analyse AS
Meltzersgate 4
0257 Oslo

post@vista-analyse.no
vista-analyse.no